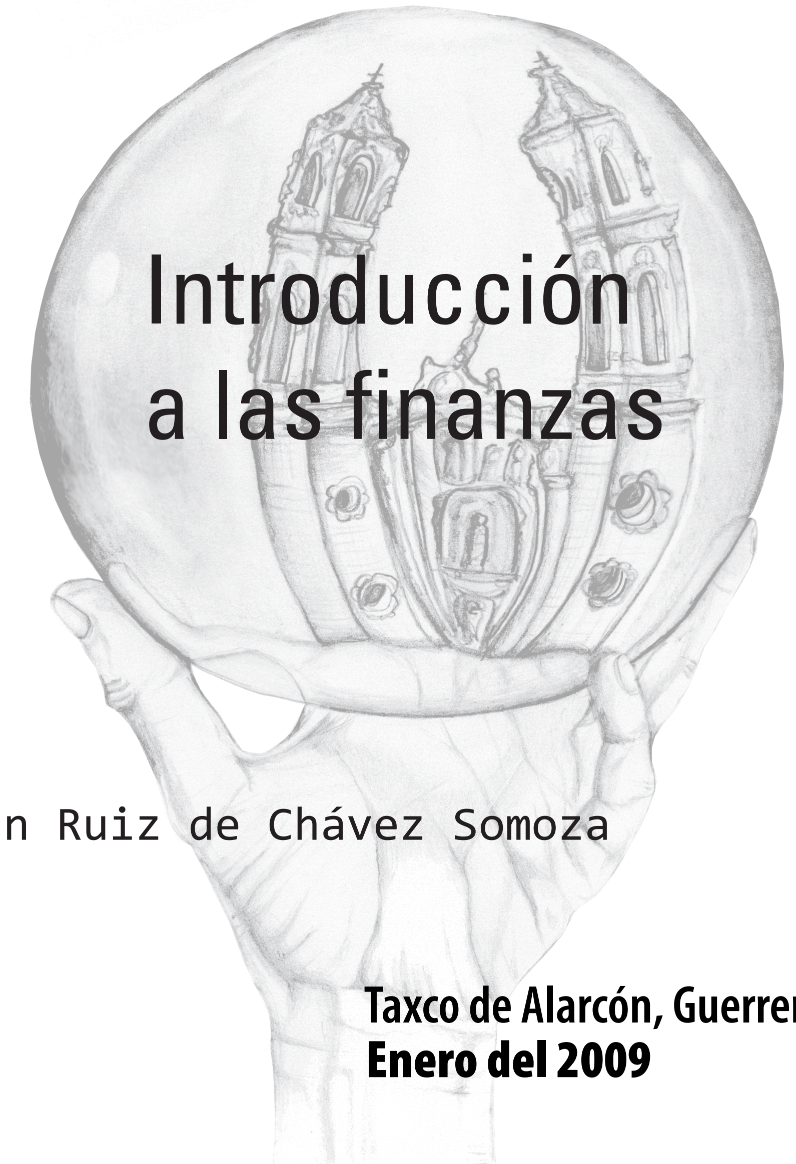
Universidad Autónoma Metropolitana - *Iztapalapa*

2° Coloquio del Departamento de Matemáticas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo

División de Ciencias Básicas e Ingenieria



Introducción a las finanzas

Juán Ruiz de Chávez Somoza

Taxco de Alarcón, Guerrero
Enero del 2009

2^{do} Coloquio del Departamento de Matemáticas

Una Introducción a las Matemáticas Financieras

Juan Ruiz de Chávez

Casa abierta al tiempo

Comité Organizador

Mario Pineda Ruelas
Roberto Quezada Batalla
Blanca Rosa Pérez Salvador
Luis Aguirre Castillo
Daniel Espinosa
Constancio Hernández García
Michaell Rivera Arce (Apoyo logístico)

Material didáctico del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autonóma Metropolitana-Iztapalapa con el apoyo del Programa Integral de Fortalecimiento Institucional 3.3 (PIFI).

Una Introducción a las Matemáticas Financieras

Juan Ruiz de Chávez

Departamento de Matemáticas, UAM-I

Casa abierta al tiempo

Universidad Autónoma Metropolitana

Contenido

Capítulo 1

Definiciones

Definición 1.0.1. Una **opción** es un título (o contrato) financiero que da a su propietario o tenedor de éste, el derecho y no la obligación de comprar o vender (según sea una opción de compra o venta) una cierta cantidad de un activo financiero, a una fecha convenida y a un precio fijado de antemano.

La descripción precisa de una opción se hace a partir de los elementos siguientes:

- Tipos de opciones: Se dice según la terminología anglo-sajona, de **call** para una opción de compra y de un **put** para una opción de venta.
- El activo subyacente, sobre el cual se tiene la opción: en la práctica puede ser éste una acción, una divisa, etc.
- El monto, es decir la cantidad de activo subyacente a comprar o vender.
- Fecha de expiración o de maduración que limita el tiempo de vigencia de la opción; si la opción se puede ejercer en cualquier momento previo a la fecha de maduración, se dice que se trata de una **o**pción americana, si la opción sólo puede ejercer en la fecha de maduración se dice que se trata de una **opción europea**.
- El precio de ejercicio, que es el precio (fijado de antemano) al cual se hace la transacción en caso de ejercer la opción, también se le denomina **p**recio strike .

La opción tiene un precio llamado **prima**. Cuando la opción es cotizada en un mercado financiero organizado, la prima está dada por el mercado. Si no hay cotización se tiene el problema de calclular la prima. Aún para una opción cotizada, puede ser de interés tener una fórmula o modelo que permita detectar anomalías del mercado.

Examinemos, para fijar ideas el caso de un call europeo (opción de compra, que sólo puede ejercerse en la fecha de expiración) con fecha de expiración T, cuyo activo subyacente es una acción tal que la cotización en la fecha t, esta dada por S_t. Sea K el precio de ejercicio. Es claro que si en la fecha de ejercicio T, el precio K es mayor que la cotización S_T, el propiertario o tenedor de la opción no estará interesado en ejercer su derecho. Pero, si $S_T > K$, el ejercer la opción permite a su propietario obtener una ganancia igual a $S_T - K$, comprando la acción al precio K y revendiéndola en el mercado en la cotización S_T. Así vemos que en la fecha de expiración, el valor del call esta dado por: $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$.

Para el vendedor de la opción se trata, en caso de ejercicio de poder proveer una acción al precio K y haber producido una riqueza igual a $(S_T - K)^+$. En el momento en que se realiza la venta de la opción, el cual lo tomaremos como origen del tiempo, la cotización S_T se desconoce y así surgen dos preguntas:

1. ¿Cuánto hay que pedir que pague el comprador de la opción, o sea como valuar en el instante $t = 0$ una riqueza $(S_T - K)^+$, disponible en la fecha T ?. Este es el **problema de valuación o pricing.**

2. ¿Cómo, el vendedor que ha cobrado la prima en el instante $t = 0$ llegará a producir una riqueza $(S_T - K)^+$ en la fecha T ?. Este es el **problema de la cobertura** .

DEFINICIÓN 1.0.2. Un **portafolio de inversión**, es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado financiero y en los que una persona o empresa, deciden invertir su dinero; matemáticamente se define como $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, donde Δ_k es el número de cantidades de la acción que se tienen en el intervalo $[k, k + 1)$.

Capítulo 2

El modelo binomial de valuación de activos

El modelo binomial para la valuación de activos proporciona una herramienta poderosa para entender la teoría de valuación, de arbitraje y la teoría de probabilidad.

Con el modelo binomial para la valuación de activos se modelarán los precios de activos en tiempo discreto, suponiendo que en cada paso, el precio cambia a uno de dos posibles valores. Comencemos con un precio inicial positivo: S_0. Existen dos números positivos: d y u, con:

$$0 < d < u, \tag{2.1}$$

tal que al siguiente periodo, el precio del activo puede ser: dS_0 o bien uS_0.

Típicamente tomamos d y u que satisfacen: $0 < d < 1 < u$, el cambio del precio del activo de S_0 a dS_0 representa un movimiento descendente, y el cambio del precio del activo de S_0 a uS_0 representa un movimiento ascendente. También es común tener $d = 1/u$, y esto será el caso en los ejemplos de expuestos en las primeras 4 secciones. De cualquier forma sólo supondremos (2.1) y (2.2) que definiremos posteriormente.

Por supuesto, los movimientos de los precios de los activos son mucho más complicados que los dados por el modelo binomial para la valuación de activos. Consideraremos este modelo por tres razones. Primero, en este modelo se observarán claramente los conceptos de valuación, de arbitraje y su relación con la probabilidad neutra al riesgo. Segunda, el modelo se utiliza en la práctica ya que con un número suficiente de pasos da una buena aproximación computacional de los modelos en tiempo continuo. Tercera, dentro de este modelo binomial podemos desarrollar la teoría de esperanza condicional y martingalas, la cual es la piedra angular de los modelos en tiempo continuo.

Con esta tercera motivación, primero daremos la notación para el modelo binomial.

Imaginemos, que se lanza una moneda, y cuando cae águila, el precio tiene un movimiento ascendente, pero cuando cae sol, el precio tiene un movimiento descendente.

Denotaremos el precio al tiempo 1 por $S_1(A) = uS_0$, si el lanzamiento resulta águila (A), y por $S_1(S) = dS_0$, si este resulta sol (S). Después del segundo lanzamiento, el precio puede ser cualquiera de:

$$S_2(AA) = uS_1(A) = u^2S_0,$$
$$S_2(AS) = dS_1(A) = duS_0,$$
$$S_2(SA) = uS_1(S) = udS_0,$$
$$S_2(SS) = dS_1(S) = d^2S_0.$$

Después de tres lanzamientos, hay ocho posibles resultados de la moneda, sin embargo no todos los resultados del precio del activo son diferentes al tiempo 3.
Por el momento asumiremos que el tercer lanzamiento es el último y así el conjunto de resultados de los tres lanzamientos es:

$$\Omega = \{AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS\}.$$

El conjunto Ω de todos los posibles resultados del experimento es llamado el espacio muestral del experimento, y los elementos ω de Ω son llamados puntos muestrales. En este caso, cada punto muestral ω es un arreglo de A's y S's. Denotemos al k-ésimo componente de ω por ω_k; por ejemplo, cuando $\omega = ASA$, tenemos: $\omega_1 = A$, $\omega_2 = S$, $\omega_3 = A$.

El precio del activo S_k en el tiempo k depende de los resultados de los lanzamientos de la moneda. Para enfatizar esto, a menudo escribiremos $S_k(\omega)$, y algunas veces usaremos notación tal como $S_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, sólo para recordar más explícitamente como S_3 depende de todas las componentes de ω, S_2 depende sólo de las dos primeras componentes de ω, S_1 depende sólo de la primer componente de ω, y S_0 no depende de ω, o sea es determinista.

Ejemplo 2.0.3. Sea $S_0 = 4, u = 2$ y $d = \frac{1}{2}$. Cada punto muestral $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ representa un posible resultado de lanzar una moneda tres veces. Entonces, podemos pensar que el espacio muestral Ω es el conjunto de todos los posibles resultados de los tres lanzamientos. Para completar nuestro modelo binomial de valuación de activos, introducimos un mercado de dinero con tasa de interés r; un peso invertido en el mercado de dinero llega a ser $(1 + r)$ en el siguiente periodo. Vamos a suponer que:

$$d < 1 + r < u. \tag{2.2}$$

El modelo no tendría sentido si no tuviésemos ésta condición. Por ejemplo, si $1 + r \geq u$, entonces la tasa de retorno del mercado de dinero es siempre por lo menos tan grande y en ocasiones mayor que la tasa de retorno del activo, y a nadie le gustaría invertir en el activo. La desigualdad $d \geq 1 + r$, no puede suceder a menos que r sea negativa o $d \geq 1$. En este último caso, la acción realmente no tiene un movimiento descendente si obtenemos sol, esta sube. Una vez que se pide prestado a una tasa de interés r y se invierte en la acción, en el peor de los casos, el precio de la acción esta a la alza tan rápido como la deuda usada para comprarla.

Con una acción como subyacente, consideremos una *opción call europea* con precio de ejercicio $K > 0$ y tiempo de maduración 1. Esta opción confiere el derecho de comprar la acción al tiempo 1 por K pesos. Es claro que si en la fecha de maduración T, el precio K es mayor que la cotización S_T , el propietario o tenedor de la opción no estará interesado en ejercer su derecho pero, si $S_T > K$, el ejercer la opción permite a su propietario obtener una ganancia igual a $(S_T - K)^+$, comprando la acción al precio K y revendiéndola en el mercado en la cotización S_T. Denotemos por:

$$V_1(\omega) = (S_1(\omega) - K)_+ = \max\{S_1(\omega) - K, 0\},$$

el valor o precio de ésta opción en la fecha de ejercicio. Por supuesto que $V_1(\omega)$ sólo depende de ω_1 y algunas veces vamos a escribir $V_1(\omega_1)$ en vez de $V_1(\omega)$.

Nuestra primera tarea es calcular el valor o precio (pricing) de esta opción al tiempo cero.

Para el vendedor de la opción call se trata, en caso de ejercicio de poder proveer una acción al precio K y haber producido una riqueza igual a $(S_T - K)^+$. En el momento en que se realiza la venta de la opción, el vendedor vendio la opción *call* por V_0 pesos, donde V_0 esta por determinarse. Ahora el vendedor tiene la obligación de pagar: $(uS_0 - K)_+$ si ω_1 es águila y pagar $(dS_0 - K)_+$ si ω_1 es sol. Al tiempo en que se vendio la opción no sabía que valor tomaría ω_1. El vendedor se protege mediante la compra de Δ_0 cantidades de una acción, donde Δ_0 todavía no ha sido determinada. El vendedor puede usar las ganacias de la venta de V_0 para este propósito, y entonces pedir prestado si es necesario con una tasa de interés r para completar la compra. Si V_0 es mayor que lo necesario para comprar las Δ_0 cantidades de la acción, el vendedor invertirá el dinero sobrante a una tasa de interés r. En ambos casos, el vendedor tendrá invertidos: $V_0 - \Delta_0 S_0$ pesos en el mercado de dinero, donde ésta cantidad puede ser negativa.

Si la acción sube, el valor del portafolio es:

$$\Delta_0 S_1(A) + (1 + r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$

y se necesita tener $V_1(A)$. Entonces, se desea elegir V_0 y Δ_0 de forma tal que se cumpla:

$$V_1(A) = \Delta_0 S_1(A) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.3}$$

Si la acción baja, el valor del portafolio es:

$$\Delta_0 S_1(S) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$

y se necesita tener $V_1(S)$. Entonces, se desea elegir V_0 y Δ_0 de forma tal que se cumpla:

$$V_1(S) = \Delta_0 S_1(S) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.4}$$

Por lo que se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; restando (2.4) de (2.3) obtenemos:

$$V_1(A) - V_1(S) = \Delta_0(S_1(A) - S_1(S)), \tag{2.5}$$

así que:

$$\Delta_0 = \frac{V_1(A) - V_1(S)}{S_1(A) - S_1(S)}. \tag{2.6}$$

Esta es la versión en tiempo discreto de la fórmula, delta cobertura para instrumentos derivados, y en el sentido estricto del cálculo es la razón de cambio del valor de las acciones con respecto al precio del activo subyacente, es decir, la derivada.

Para completar la solución de (2.3) y (2.4), sustituyamos (2.6) en (2.3) o en(2.4) y resolvamos para V_0. Después de algunas simplificaciones, tenemos:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\frac{1+r-d}{u-d}V_1(A) + \frac{u-(1+r)}{u-d}V_1(S)\right]. \tag{2.7}$$

Este es el precio para una opción *call europea* de valor V_1 al tiempo 1, para simplificar esta fórmula definamos:

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \widetilde{q} = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1 - \widetilde{p}, \tag{2.8}$$

así de (2.7) obtenemos:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_1(A) + \widetilde{q}V_1(S)\right]. \tag{2.9}$$

Puesto que hemos tomado $d < u$, $\widetilde{p}$ y $\widetilde{q}$ estan bien definidas, es decir, el denominador en (2.8) no es cero.

De (2.2), tanto $\widetilde{p}$ como $\widetilde{q}$ estan en el intervalo $(0,1)$ y puesto que suman 1, podemos verlas como las probabilidades de A y S, respectivamente. Estas son las llamadas **p**robabilidades neutras al riesgo y aparecen cuando resolvemos las dos ecuaciones (2.3) y (2.4), y no tienen que ver con las probabilidades actuales de obtener A o S en los lanzamientos de las monedas. De hecho, en este punto, sólo son una herramienta conveniente para escribir (2.7) como (2.9).

Ahora consideremos una opción call europea que paga K pesos al tiempo 2. En el tiempo de maduración el valor de esta opción es $V_2 = (S_2 - K)^+$, donde V_2 y S_2 dependen de ω_1 y ω_2, el primer y el segundo lanzamiento de la moneda respectivamente. Deseamos determinar el precio para esta opción al tiempo cero. Suponga que un agente vende la opción al tiempo cero por V_0 pesos, donde V_0 esta por determinarse. El inversionista compra Δ_0 cantidades de la acción, inviertiendo $V_0 - \Delta_0 S_0$ pesos en el mercado de dinero para financiar esto. Al tiempo 1, el inversionista tiene un portafolio valuado en:

$$X_1 = \Delta_0 S_1 + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0). \tag{2.10}$$

Si bien, no nos lo indica en la notación, S_1 y por lo tanto X_1 dependen de ω_1, es decir del resultado del primer lanzamiento de la moneda. Entonces, existen dos ecuaciones implícitas en (2.10):

$$X_1(A) = \Delta_0 S_1(A) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0),$$
$$X_1(S) = \Delta_0 S_1(S) + (1+r)(V_0 - \Delta_0 S_0).$$

Después del primer lanzamiento de la moneda, el inversionista tiene X_1 pesos y puede reajustarlo a su estrategia. Suponga que el inversionista decide ahora guardar Δ_1 cantidades de la acción, donde Δ_1 depende de ω_1 porque el inversionista sabe que valor ha tomado ω_1. El inversionista invierte el resto en $X_1 - \Delta_1 S_1$ en el mercado de dinero. En el siguiente periodo, su ganancia estará dada por el lado derecho de la siguiente ecuación, y el inversionista desea que ésta sea V_2. Por lo tanto, el inversionista quiere tener:

$$V_2 = \Delta_1 S_2 + (1+r)(X_1 - \Delta_1 S_1). \tag{2.11}$$

Considerando todos los resultados podemos escribir (2.11) como cuatro ecuaciones:

$$V_2(AA) = \Delta_1(A)S_2(AA) + (1+r)(X_1(A) - \Delta_1(A)S_1(A)),$$
$$V_2(AS) = \Delta_1(A)S_2(AS) + (1+r)(X_1(A) - \Delta_1(A)S_1(A)),$$
$$V_2(SA) = \Delta_1(S)S_2(SA) + (1+r)(X_1(S) - \Delta_1(S)S_1(S)),$$
$$V_2(SS) = \Delta_1(S)S_2(SS) + (1+r)(X_1(S) - \Delta_1(S)S_1(S)).$$

Ahora tenemos seis ecuaciones, las dos representadas por (2.10) y las cuatro representadas por (2.11), en las seis desconocemos: V_1, Δ_0, $\Delta_1(A)$, $\Delta_1(S)$, $X_1(A)$ y $X_1(S)$.

Para resolver estas ecuaciones y por ende determinar el precio V_0 de la opción, del portafolio de cobertura Δ_0, $\Delta_1(A)$ y $\Delta_1(S)$, comencemos con las dos últimas ecuaciones:

$$V_2(SA) = \Delta_1(S)S_2(SA) + (1+r)(X_1(S) - \Delta_1(S)S_1(S)),$$
$$V_2(SS) = \Delta_1(S)S_2(SS) + (1+r)(X_1(S) - \Delta_1(S)S_1(S)).$$

resolviendo para $\Delta_1(S)$ obtenemos la fórmula delta cobertura:

$$\Delta_1(S) = \frac{V_2(SA) - V_2(SS)}{S_2(SA) - S_2(SS)}. \tag{2.12}$$

y sustituyendo $\Delta_1(S)$, obtenemos:

$$X_1(S) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(SA) + \widetilde{q}V_2(SS)\right]. \tag{2.13}$$

La ecuación (2.13), da el valor del portafolio de cobertura que se debe tener al tiempo 1, si la acción tiene un movimiento descendente entre el tiempo 0 y 1. Definimos ésta cantidad como el *valor de la opción al tiempo 1 si* $\omega_1 = S$, y la denotamos por $V_1(S)$. Tenemos que:

$$V_1(S) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(SA) + \widetilde{q}V_2(SS)\right], \tag{2.14}$$

El portafolio de cobertura debe escogerse de tal forma que su riqueza $X_1(S)$, si $\omega_1 = S$, concuerde con $V_1(S)$ definida por (2.14). Esta fórmula es análoga a la fórmula (2.9), pero después de un periodo. Las primeras dos ecuaciones implícitas en (2.11) nos llevan similarmente a las fórmulas:

$$\Delta_1(A) = \frac{V_2(AA) - V_2(AS)}{S_2(AA) - S_2(AS)}. \tag{2.15}$$

y $X_1(A) = V_1(A)$, donde $V_1(A)$ es el valor de la opción al tiempo 1 si $\omega_1 = A$, definido por:

$$V_1(A) = \frac{1}{1+r}\left[\widetilde{p}V_2(AS) + \widetilde{q}V_2(AS)\right]. \tag{2.16}$$

Esta es una fórmula análoga a (2.9) un periodo después . Finalmente, igualamos los valores $X_1(A) = V_1(A)$ y $X_1(A) = V_1(A)$ en las dos ecuaciones implícitas en (2.10). La solución de estas ecuaciones para Δ_0 y V_0 es la misma que la solución de (2.3) y (2.4) y resultan de nuevo en (2.6) y (2.9).

Si denotamos por V_k el valor al tiempo k de la opción y este depende de los primeros k lanzamientos de la moneda: ω_1, $\omega_2, \ldots,$ ω_{k-1}, ω_k, después de los primeros $k-1$ lanzamientos los ω_1,ω_2,. . . ,ω_{k-1} son conocidos, el portafolio de cobertura debe tener $\Delta_{k-1}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1})$ cantidades de acciones, donde

$$\Delta_{k-1}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{k-1}) = \left[\frac{V_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, A) - V_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, S)}{S_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, A) - S_k(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, S)}\right]. \tag{2.17}$$

y el valor al tiempo $k-1$ de la opción, cuando los resultados de los primeros $k-1$ lanzamientos son ω_1,ω_2,. . . ,ω_{k-1}, esta dado por:

$$\begin{aligned} V_{k-1}(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{k-1}) = \frac{1}{1+r}\Big[&\widetilde{p}V_k(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{k-1},A) \\ &+\widetilde{q}V_k(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{k-1},S)\Big]. \end{aligned}$$

Capítulo 3

Espacios finitos de probabilidad

DEFINICIÓN 3.0.4. Sea Ω un conjunto no vacio. Una σ-**álgebra** es una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de Ω con las siguientes propiedades:

(1) $\emptyset \in \mathfrak{F}$,
(2) Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $A^c \in \mathfrak{F}$,
(3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una sucesión de conjuntos de $\mathfrak{F}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ también está en $\mathfrak{F}$.

Algunas σ-álgebras importantes de los subconjuntos del conjunto Ω del Ejemplo 2.1 son:

$$\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$
$$\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{AAA, AAS, ASA, ASS\}, \{SAA, SAS, SSA, SSS\}\}$$
$$\mathfrak{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{AAA, AAS\}, \{ASA, ASS\}, \{SAA, SAS\}, \{SSA, SSS\} \text{y todos los conjuntos que pueden construirse tomando las uniones de estos}\},$$
$$\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F} = \text{ El conjunto de todos los subconjuntos de } \Omega.$$

Para simplificar la notación, definamos:

$$A_A \triangleq \{AAA, AAS, ASA, ASS\} = \{A \text{ en el primer lanzamiento}\},$$
$$A_S \triangleq \{SAA, SAS, SSA, SSS\} = \{S \text{ en el primer lanzamiento}\},$$

así que

$$\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, A_A, A_S\}.$$

y también definamos:

$$A_{AA} \triangleq \{AAA, AAS\} = \{AA \text{ en los primeros dos lanzamientos}\},$$
$$A_{AS} \triangleq \{ASA, ASS\} = \{AS \text{ en los primeros dos lanzamientos}\},$$
$$A_{SA} \triangleq \{SAA, SAS\} = \{SA \text{ en los primeros dos lanzamientos}\},$$
$$A_{SS} \triangleq \{SSA, SSS\} = \{SS \text{ en los primeros dos lanzamientos}\}$$

así que:

$$\mathfrak{F}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset, \Omega, A_{AA}, A_{AS}, A_{SA}, A_{SS}, A_A, A_S, \\ A_{AA} \cup A_{SA}, A_{AA}, A_{SS}, A_{AS} \cup A_{SA}, \\ A_{AS} \cup A_{SS}, A^c_{SS}, A^c_{AS}, A^c_{SA}, A^c_{SS}. \end{array} \right\}$$

Interpretamos las σ-álgebras como aquellas que guardan la información: la σ-álgebra $\mathfrak{F}_1$, se dice que contiene la información del primer lanzamiento, la cual usualmente es nombrada "información al tiempo 1". Similarmente, $\mathfrak{F}_2$ contiene la información de los primeros dos lanzamientos, por ello se dice que contiene la información al tiempo 2. La $\sigma-$álgebra $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}$ contiene toda la información acerca del resultado de los tres lanzamientos. Por último $\mathfrak{F}_0$ es llamada $\sigma-$álgebra trivial, ya que no contiene información.

Capítulo 4

Esperanza condicional

4.1. Inrormación

DEFINICIÓN 4.1.1. (Eventos determinados por los primeros k lanzamientos). Decimos que un **evento** $A \subset \Omega$ **está determinado por los primeros** k **lanzamientos** si, sabiendo sólo el resultado de los primeros k lanzamientos, podemos saber cuales resultados de todos los lanzamientos estan en A. En general, denotaremos la colección de conjuntos determinados por los primeros k lanzamientos por $\mathfrak{F}_k$. Se puede demostrar que $\mathfrak{F}_k$ es una σ-álgebra.

Note que la variable aleatoria S_k es $\mathfrak{F}_k$-medible, para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Antes de hablar de esperanza condicional, necesitamos introducir una medida de probabilidad en nuestro espacio muestral Ω de lanzamientos de una moneda. Definamos:

- $p \in (0, 1)$, es la probabilidad de águila,
- $q \triangleq (1 - p)$, es la probabilidad de sol,
- Los lanzamientos de moneda son independientes, entonces: $P(AAS) = p^2q$, etc.,

Recordemos que la esperanza de una v.a. se define como:

DEFINICIÓN 4.1.2 (Esperanza).

$$EX \triangleq \sum_{w \in \Omega} X(w) P(w).$$

Si $A \subset \Omega$ entonces la **función indicadora** de A se define como:

$$I_A(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{array} \right\}.$$

y en ése caso

$$E(I_A X) = \int_A X dP = \sum_{\omega \in A} X(w) P(w).$$

Podemos pensar a $E(I_A X)$ como el promedio parcial de X en el conjunto A.

Recordemos el Teorema de Radon-Nikodyn que nos permite obtener la exitencia de la esperanza condicional.

TEOREMA 4.1.3 (Radon-Nikodym). *Sea P y $\widetilde{P}$ dos medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathfrak{F})$. Supongamos que para todo $A \in \mathfrak{F}$ que satisface $P(A) = 0$, también tenemos que $\widetilde{P}(A) = 0$. Entonces decimos que $\widetilde{P}$ es absolutamente continua con respecto a P. Bajo esta suposición, existe una variable aleatoria no negativa Z tal que:*

$$\widetilde{P}(A) = \int_A Z dP, \ \forall A \in \mathfrak{F}. \tag{4.1}$$

NOTA 1. La ecuación (4.1) implica

$$\widetilde{E}X = E[XZ]$$

para toda variable aleatoria X para la cual $E|XZ| < \infty$.

NOTA 2. Si $\widetilde{P}$ es absolutamente continua con respecto a P, y P es absolutamente continua respecto a $\widetilde{P}$, decimos que P y $\widetilde{P}$ son *equivalentes*. P y $\widetilde{P}$ son equivalentes si y sólo si

$$P(A) = 0 \text{ cuando } \widetilde{P}(A) = 0, \ \forall A \in \mathfrak{F}.$$

4.2. Definición de esperanza condicional

TEOREMA 4.2.1. *Sean $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $\mathcal{G}$ una sub-$\sigma-$álgebra de $\mathfrak{F}$. Sea X una variable aleatoria integrable, entonces*

a) *Existe una v.a. Y, $\mathcal{G}$-medible e integrable tal que*

$$\forall B \in \mathcal{G} \int_B X dP = \int_B Y dP. \tag{4.2}$$

b) *Si Y' es otra v.a. $\mathcal{G}-$medible, e integrable tal que se cumple la ecuación 4.2, entonces $Y = Y'$ P.c.s..*

c) *La clase de equivalencia de v.a. $\mathcal{G}-$medibles que cumplen con la ecuación 4.2, es llamada la esperanza condicional de X dada $\mathcal{G}$ y se denota por $E[X/\mathcal{G}]$.*

Notacion Para variables aleatorias X, Y, denotaremos por:

$$E(X/Y) \triangleq E(X/\sigma(Y)).$$

4.3. Discusión adicional del promedio parcial

La propiedad de promedio parcial es:

$$\int_A E(X/\mathcal{G}) \, dP = \int_A X dP, \ \forall A \in \mathcal{G}. \tag{4.3}$$

Podemos escribir esto como:

$$E\left[I_A E\left(X/\mathcal{G}\right)\right] = E\left[I_A X\right]. \tag{4.4}$$

4.4. Propiedades de la esperanza condicional

a) Si X es $\mathcal{G}$ medible, entonces

$$E\left(X/\mathcal{G}\right) = X.$$

Si la información contenida en $\mathcal{G}$ es suficiente para determinar X, entonces la mejor estimación de X basada en $\mathcal{G}$ es X misma.

b) Si Z es $\mathcal{G}$ medible, entonces

$$E\left(ZX/\mathcal{G}\right) = ZE\left(X/\mathcal{G}\right).$$

Cuando condicionamos sobre $\mathcal{G}$, la variable aleatoria Z, $\mathcal{G}$-medible actua como una constante.

c) Si $\mathfrak{H}$ es una sub σ-álgebra de $\mathcal{G}$, entonces

$$E\left(E\left(X/\mathcal{G}\right)/\mathfrak{H}\right) = E\left(X/\mathfrak{H}\right)$$

Que $\mathfrak{H}$ sea una sub σ-álgebra de $\mathcal{G}$ significa que $\mathcal{G}$ contiene más información que $\mathfrak{H}$.

Si estimamos X basándonos en la información en $\mathcal{G}$, y después calculamos el estimador basado en la cantidad más pequeña de información en $\mathfrak{H}$, entonces obtenemos el mismo resultado si hubiésemos estimado directamente X basado en la información de $\mathfrak{H}$.

En particular si $\mathcal{G} = \{\Omega, \emptyset\}$, entonces

$$E\left(E\left(X/\mathcal{G}\right)\right) = E\left(X\right).$$

e) Independencia

Si $\mathfrak{H}$ es independiente de $\sigma\left(\sigma(X), \mathcal{G}\right)$, entonces

$$E\left[X/\sigma\left(\mathcal{G}, \mathfrak{H}\right)\right] = E\left[X/\mathcal{G}\right].$$

En particular, si X es independiente de $\mathfrak{H}$, entonces:

$$E\left[X/\mathfrak{H}\right] = E\left[X\right].$$

Si $\mathfrak{H}$ es independiente de X y de $\mathcal{G}$, entonces nada se gana incluyendo la información contenida en $\mathfrak{H}$ en la estimación de X.

4.5. Aplicación al modelo binomial

Consideremos Ω los resultados de lanzar una moneda dos veces. Recordemos que: $\mathfrak{F}_1 = \{\emptyset, A_A, A_S, \Omega\}$. Note que $E(S_2/\mathfrak{F}_1)$ debe ser una constante sobre A_A o A_S. Ahora, puesto que $E(S_2/\mathfrak{F}_1)$ debe satisfacer la propiedad de promedio parcial, (21)

$$\int_{A_A} E(S_2/\mathfrak{F}_1)\,dP = \int_{A_A} S_2 dP,$$
$$\int_{A_S} E(S_2/\mathfrak{F}_1)\,dP = \int_{A_S} S_2 dP.$$

Calculemos teniendo en cuenta que sobre A_A la esperanza condicional es constante,

$$\begin{aligned}\int_{A_A} E(S_2/\mathfrak{F}_1)\,dP &= P(A_A)\,E(S_2/\mathfrak{F}_1)(w)\\ &= pE(S_2/\mathfrak{F}_1)(w), \forall w \in A_A.\end{aligned}$$

Por el otro lado,

$$\int_{A_A} S_2 dP = p^2u^2S_0 + pqudS_0.$$

Por lo tanto,

$$E(S_2/\mathfrak{F}_1)(w) = pu^2S_0 + qudS_0, \forall w \in A_A.$$

También podemos escribir:

$$\begin{aligned}E(S_2/\mathfrak{F}_1)(w) &= pu^2S_0 + qudS_0 = (pu+qd)\,uS_0\\ &= (pu+qd)\,S_1(w), \forall w \in A_A.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$E(S_2/\mathfrak{F}_1)(w) = (pu+qd)S_1(w), \forall w \in A_S.$$

En los dos casos tenemos

$$E(S_2/\mathfrak{F}_1)(w) = (pu+qd)\,S_1(w), \forall w \in \Omega.$$

Un argumento similar para el siguiente paso en el tiempo muestra que

$$E(S_3/\mathfrak{F}_2)(w) = (pu+qd)\,S_2(w).$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}E[E(S_3/\mathfrak{F}_2)/\mathfrak{F}_1] &= E[(pu+qd)S_2/\mathfrak{F}_2] = (pu+qd)\,E(S_2/\mathfrak{F}_1)\\ &= (pu+qd)^2S_1.\end{aligned}$$

Esta expresión es $E(S_3/\mathfrak{F}_1)$.

Capítulo 5

Martingalas

Los ingredientes para el estudio de martingalas son:

- Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
- Una sucesión de σ-álgebras $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \ldots$ con la propiedad de $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq, \ldots, \subseteq \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{F}$. la sucesión de $\sigma-$álgebras es llamada **f**iltración .
- Una sucesión de variables aleatorias M_0, $M_1, \ldots$ llamada un**p**roceso estocástico, en tiempo discreto.

Condiciones para ser una martingala:

(1) Cada M_k es $\mathfrak{F}_k-$medible. Si se conoce la información de $\mathfrak{F}_k$, entonces se conoce el valor de M_k. Decimos que el proceso $\{M_k\}$ es **adaptado** a la filtración $\{\mathfrak{F}_k\}$.

(2) Para cada k, $E(M_{k+1}/\mathfrak{F}_k) = M_k$. Las martingalas no tienden a subir ni tampoco tienden a bajar.

Una supermartingala tiende a bajar, es decir, la condición 2 de las martingalas es reemplazada por

$$E(M_{k+1}/\mathfrak{F}_k) \leq M_k;$$

una submartingala tiende a subir, es decir

$$E(M_{k+1}/\mathfrak{F}_k) \geq M_k.$$

EJEMPLO 5.0.1 (El modelo binomial). Para $k = 1, 2$ hemos mostrado que

$$E(S_{k+1}/\mathfrak{F}_k) = (pu + qd)S_k.$$

Para $k = 0$, tenemos el conjunto $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, la "$\sigma$-álgebra trivial". Esta σ-álgebra no contiene información, y cualquier variable aleatoria $\mathfrak{F}_0-$medible debe ser una constante i.e. no aleatoria. Por lo tanto, por definición, $E(S_1/\mathfrak{F}_0)$ es una costante que satisface la propiedad del promedio parcial.

$$\int_\Omega E(S_1/\mathfrak{F}_0)\, dP = \int_\Omega S_1 dP.$$

El lado derecho es $ES_1 = (pu + qd)\, S_0$, así que tenemos

$$E(S_1/\mathfrak{F}_0) = (pu + qd)\, S_0.$$

En conclusión,

- Si $(pu + qd) = 1$ entonces
  $\{S_k, \mathfrak{F}_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ es una martingala.
- Si $(pu + qd) \geq 1$ entonces
  $\{S_k, \mathfrak{F}_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ es una submartingala.
- Si $(pu + qd) \leq 1$ entonces
  $\{S_k, \mathfrak{F}_k, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ es una supermartingala.

Capítulo 6

El modelo de Cox-Ross & Rubinstein y la Fórmula de Black & Scholes

Aquí vamos a tener dos activos, uno sin riesgo invertido a una tasa r por periodo y una acción, tal que da una tasa de rendimiento (o tasa de retorno) entre la fecha n y $n+1$ que puede ser $(d-1)$ o bien $(u-1)$, con $d < 1+r < d$. En la fecha cero la acción tiene un valor S_0. En la fecha $n+1$ el valor de la acción resulta ser:

$$S_{n+1} = \begin{cases} u \cdot S_n & \text{con probabilidad } p \\ d \cdot S_n & \text{con probabilidad } 1-p. \end{cases}$$

Notemos que para cualquier j, S_{j+1}/S_j, sólo puede tomar los valores u o bien d.

Si no hay oportunidad de hacer arbitraje existe una probabilidad p^* de pasar de cualquiera de los nodos del árbol binomial al siguiente nodo que se encuentra en la posición ascendente, esto independientemente del nodo y la fecha.

$$p^* = \frac{1}{u-d}(1+r-d).$$

Siendo los mercados completos la p^* es única.

Ahora como el precio de la acción en la fecha n sólo depende del número de subidas de la acción de la fecha cero a la fecha n (el número de bajadas es la diferencia entre n y el número de subidas). Con la probabilidad p^*, S_n en una v.a. binomial de parámetros n y p^*, i.e.:

$$P[S_n = u^j d^{n-j} S_0] = \binom{n}{j}(p^*)^j(1-p^*)^{n-j}.$$

6.1. Pricing

Denotemos por C_0 el valor del call asociado. Si se tienen n periodos

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} E^*(S_n - K)_+.$$

Así que calculando esperanza

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(p^*)^j(1-p^*)^{n-j}(u^j d^{n-j}S_0 - K)_+. \tag{6.1}$$

Vamos a escribir la fórmula anterior 6.1 de otro modo. Primero definamos

$$\eta = \inf\{j \in \mathbb{N} : u^j d^{n-j} S_0 - K > 0\}$$

Sea $[[\alpha]]$ la parte entera del número α, i.e. $[[\alpha]] \leq \alpha < [[\alpha]] + 1$. Se tiene que

$$\eta = \left[\left[\frac{\log(K/S_0 d^n)}{\log(u/d)}\right]\right] + 1.$$

En términos financieros, η es el número mínimo de subidas que se tienen que dar durante los n periodos para estar “in the money" i.e. para obtener una ganancia estrictamente positiva. Así que (6.1) la podemos reescribir como:

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{j=\eta}^{n}\binom{n}{j}(p^*)^j(1-p^*)^{n-j}(u^j d^{n-j}S_0 - K)_+.$$

Denotemos por:

$$b(n,j,p) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$B(n,\eta,p^*) = \sum_{j=\eta}^{n} b(n,j,p^*).$$

Teniendo en cuenta que

$$1 - \frac{p^* u}{1+r} = \frac{d - dp^*}{1+r},$$

se obtiene:

PROPOSICIÓN 6.1.1. *El precio de una opción de compra para el modelo binomial esta dado por:*

$$\begin{aligned} C_0 &= S_0 \sum_{j=\eta}^{n}\left(\frac{p^* u}{1+r}\right)^j \left(\frac{d - dp^*}{1+r}\right)^{n-j} - \frac{K}{(1+r)^n} B(n,\eta,p^*) \\ &= S_0 B\left(n,\eta,\frac{p^* u}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^n} B(n,\eta,p^*). \end{aligned}$$

6.2. Vamos a escoger los Parámetros

Vamos a suponer que tenemos un mercado financiero en un periodo de tiempo $[0, T]$. Supongamos que tenemos n periodos de longitud T/n. Ahora estudiemos el modelo binomial para estos n periodos. Aquí vamos a suponer que los parámetros r_n, u_n y d_n, dependen del tamaño del intervalo (Aquí T/n) y que además:

i) $\lim_n (1 + r_n)^n = \exp^{\rho T}$ por ejem. $r_n = \rho/n$),

donde ρ es la tasa de rendimiento instantánea.

Sea S_n, el precio del activo después de n periodos. Si J es la v.a. que denota el número de alzas para los n periodos. Entonces

$$\begin{aligned} S_n \circ (J/J = j) &= S_o u^j d^{n-j} \\ \log \frac{S_n}{S_0} &= J \log \frac{u_n}{d_n} + n \log d_n, \end{aligned} \tag{6.2}$$

donde J es v.a. binomial de parámetros n y p_n^* (p_n^* depende del número de periodos pero no de cual es el periodo).

Se tiene en particular que:

$$EJ = np_n, \mathrm{Var}(J) = np_n(1 - p_n).$$

Denotemos por $n\mu_n$ la esperanza de $\ln \frac{S_n}{S_0}$ y $n\sigma_n^2$ su varianza. Sea S_T el precio del activo al tiempo T.

Vamos a dar algunas condiciones para que el modelo discreto aproxime al precio S_T, en el sentido de que:

$$E \ln \left(\frac{S_n}{S_0} \right) \to E \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right)$$

y

$$\mathrm{Var} \left(\ln \frac{S_n}{S_0} \right) \to \mathrm{Var} \left(\ln \frac{S_T}{S_0} \right).$$

Utilizando que J es binomial y la ecuación 6.2 se obtiene que

$$\begin{aligned} E \ln \frac{S_n}{S_0} &\doteq n\mu_n = n(p_n \ln \frac{u_n}{dn} + \ln d_n), \\ \mathrm{Var} \left(\ln \frac{S_n}{S_0} \right) &\doteq n\sigma_n^2 = np_n(1 - p_n) \left(\ln \frac{u_n}{d_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Vamos a tomar $p_n = 1/2$ para simplificar. Hemos visto que el precio de la opción no depende de p_n así que vamos a pedir que los coeficientes u_n, d_n, sean tales que $n\mu_n \to \mu T$ y $n\sigma_n^2 \to \sigma^2 T$. donde μ y σ^2 representan la media y varianza “instantánea" del rendimiento. Para que pase esto podemos tomar por ejemplo:

$$\begin{aligned} u_n &= \exp^{\mu\frac{T}{n}+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, \\ d_n &= \exp^{\mu\frac{T}{n}-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}. \end{aligned} \tag{6.3}$$

6.3. Paso al caso límite

Vamos a estudiar el comportamiento de

$$S_0 B\left(n, \eta_n, \frac{p_n^* u_n}{1+r_n}\right) - \frac{K}{(1+r_n)^n} B(n, \eta_n, p_n^*),$$

con

$$\eta_n = \left[\left[\frac{\ln(K/S_0 d_n^n)}{\ln(u_n/d_n)}\right]\right] + 1$$

y

$$p_n^* = \frac{1+r_n-d_n}{u_n-d_n},$$

Hagamos los cálculos para $B(n, \eta_n, p_n^*)$.

$$B(n, \eta, p) = \sum_{j=\eta}^{n} b(n, j, p);$$

$$b(n, j, p) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

Por tanto:

$$B(n, \eta_n, p_n^*) = 1 - P[Y_n < \eta],$$

donde Y_n es la suma de n v.a.i. Bernoulli de parámetro p_n^* (p_n^* depende de n y η). Vamos a omitir el subíndice para aligerar las notaciones.

Ahora

$$P[Y_n < \eta] = P\left[-\frac{Y_n - np^*}{\sqrt{np^*(1-p^*)}} < \frac{\eta - np^*}{\sqrt{np^*(1-p^*)}}\right].$$

Utilizando la definición de η y 6.3 tenemos que

$$\eta_n = \frac{1}{2}n + \frac{\ln\frac{K}{S_0} - \mu T}{2\sigma\sqrt{T}}\sqrt{n} + O\left(\sqrt{n}\right).$$

Ahora utilizando el valor de p_n^* en función de u_n y d_n, se obtiene:

$$p_n^* - \frac{1}{2} \cong \frac{\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{n}}\left(\rho - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

De donde resulta que

$$\frac{\eta_n - np_n^*}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln\frac{K}{S_0} - (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

PROPOSICIÓN 6.3.1. *Para cada n sean $(X_{1,1},\dots X_{1,n})$, n v.a.i.i.d Bernoulli de parámetro p_n^* o sea*

$$P[X_{i,n}=1]=1-P[X_{i,n}=0]=p_n^*$$

y sea $Y_n=\sum_{i=1}^n S_{i,n}$. Entonces una extensión del Teorema límite central, (Teorema de Lindeberg, ya que la distribución de las v.a. depende de n) nos dice que:

$$\frac{Y_n-np_n^*}{\sqrt{np_n^*(1-p_n^*)}}\longrightarrow Z\rightsquigarrow N(0,1).$$

6.4. Fórmula de Black-Scholes

Reuniendo los resultados de esta sección obtenemos que:

$$B(n,\eta_n,p_n^*)\longrightarrow 1-\Phi\left(\frac{\ln K/S_0-\left(\rho-\frac{1}{2\sigma^2}\right)^T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

donde

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp^{-\frac{u}{2}}du.$$

Como $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, se sigue que:

$$B(n,\eta_n,p_n^*)\longrightarrow\Phi\left(\frac{\ln S_0/K+\left(\rho-\frac{1}{2\sigma^2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

TEOREMA 6.4.1. *Cuando $n\to+\infty$, teniendo en cuenta que $u_n=\exp^{\mu T/n+\sigma\sqrt{T/n}}$; $d_n\exp^{\mu T/n-\sigma\sqrt{T/n}}$*

$$C_0\to S_0\Phi(a)-K\exp^{-\rho T}\Phi(a-\sigma\sqrt{T})$$

donde

$$a=\frac{\ln(S_0/K)+\rho^T}{\sigma\sqrt{T}}+\frac{1}{2}\sigma^{\sqrt{T}}.$$

Para el caso de una opción de compra

$$P_0=K\exp^{-\rho T}\Phi(\delta+\sigma\sqrt{T})-S_0\Phi(\delta),$$

donde

$$\delta=\frac{\ln(K/S_0)-\rho T}{\sigma\sqrt{T}}-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}.$$

De aquí se obtiene la fórmula de Paridad

$$C_0=P_0+S_0-\exp^{-\rho T}K.$$

Capítulo 7

Modelo semicontinuo del proceso de precios de activos

7.1. Movimiento browniano en tiempo discreto

DEFINICIÓN 7.1.1. Sea $\{Y_n\}_{0\leq n\leq N}$, una colección de variables aleatorias normales estandard definidas en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. El **movimiento browniano en tiempo discreto** se define como:

$$B_0 = 0,$$
$$B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Si conocemos $Y_1,\ Y_2, \ldots, Y_k$ entonces conocemos $B_1,\ B_2, \ldots, B_k$. Inversamente, si conocemos $B_1,\ B_2, \ldots, B_k$, entonces conocemos Y_1, $Y_2, \ldots, Y_k$, ya que:

$$Y_1 = B_1, \qquad B_2 = Y_1 + Y_2 = B_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = B_2 - B_1,$$

para k

$$B_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j = Y_k + \sum_{j=1}^{k-1} Y_j = Y_k + B_{k-1} \quad \Rightarrow \quad Y_k = B_k - B_{k-1}.$$

Definamos la filtración:

$$\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$
$$\mathfrak{F}_k = \sigma(Y_1, \ldots, Y_k) = \sigma(B_1, \ldots, B_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

PROPOSICIÓN 7.1.2. *La sucesión* $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ *es una* P*-martingala con respecto a la filtración* $(\mathfrak{F}_k)_{k=1}^{N}$.

DEMOSTRACIÓN 7.1.3.

$$E[B_{k+1}/\mathfrak{F}_k] = E[Y_{k+1}] + B_k = B_k. \tag{7.1}$$

7.2. El proceso de precios

Dados los parámetros:

- $\mu \in \mathbb{R}$, la tasa media de retorno.
- $\sigma > 0$, la volatilidad.
- $S_0 > 0$, el precio inicial del activo.

El proceso de precios del activo esta dado por:

$$S_k = S_0 \exp\left\{\sigma B_k + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) k\right\}, \quad k = 0, \dots, n.$$

Notemos que:

$$S_{k+1} = S_k \exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\} \tag{7.2}$$

y así

$$\begin{aligned} E\left[S_{k+1} / \mathfrak{F}_k\right] &= S_k E\left[\exp\{\sigma Y_{k+1}\} / \mathfrak{F}_k\right] \exp\left\{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \\ &= S_k \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\} \exp\left\{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \qquad (7.3) \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\} S_k. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \mu &= \ln\left(E\left[S_{k+1} / \mathfrak{F}_k\right]\right) - \ln\left(S_k\right) \\ &= \ln\left(\frac{E\left[S_{k+1} / \mathfrak{F}_k\right]}{S_k}\right), \end{aligned}$$

como S_k es $\mathfrak{F}_k-$medible, entonces:

$$\mu = \ln\left(E\left[\frac{S_{k+1}}{S_k} / \mathfrak{F}_k\right]\right).$$

De (7.2) sabemos que:

$$\frac{S_{k+1}}{S_k} = \exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right\},$$

así que:

$$\mathrm{Var}(\ln \frac{S_{k+1}}{S_k}) = \mathrm{Var}(\sigma Y_{k+1} + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})) = \sigma^2.$$

7.3. Otros procesos del mercado

Otros procesos del mercado son:

(1) El proceso del mercado de dinero
  - $M_k = e^{rk}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

(2) El proceso del portafolio

- $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$.
- Cada Δ_k es $\mathfrak{F}_k$-medible.

(3) El proceso de la fortuna o valor del portafolio
- X_0 es dado, así que no es aleatorio.
- $X_{k+1} = \Delta_k S_{k+1} + e^r (X_k - \Delta_k S_k) = \Delta_k (S_{k+1} - e^r S_k) + e^r X_k$.

(4) El proceso del valor del portafolio actualizado
- $\dfrac{X_{k+1}}{M_{k+1}} = \Delta_k \left(\dfrac{S_{k+1}}{M_{k+1}} - \dfrac{S_k}{M_k} \right) + \dfrac{X_k}{M_k}$.

7.4. Probabilidad neutra al riesgo

DEFINICIÓN 7.4.1. Sea $\widetilde{P}$ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathfrak{F})$, equivalente a P. Si el proceso del valor del portafolio actualizado $\left\{ \frac{S_k}{M_k} \right\}_{k=0}^{n}$ es martingala con respecto a $\widetilde{P}$, diremos que $\widetilde{P}$ **es una probabilidad neutra al riesgo**.

TEOREMA 7.4.2. *Si $\widetilde{P}$ es una medida de probabilidad neutra al riesgo, entonces todo proceso del valor de la fortuna actualizada $\left\{ \frac{X_k}{M_k} \right\}_{k=0}^{n}$ es una martingala con respecto a $\widetilde{P}$, sin importar la composición del proceso del portafolio que se utilice para generarlo.*

Demostración:
$$\begin{aligned} \widetilde{E}\left[\frac{X_{k+1}}{M_{k+1}} / \mathfrak{F}_k \right] &= \widetilde{E}\left[\Delta_k \left(\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} - \frac{S_k}{M_k} \right) + \frac{X_k}{M_k} / \mathfrak{F}_k \right] \\ &= \Delta_k \left(\widetilde{E}\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} / \mathfrak{F}_k \right] - \frac{S_k}{M_k} \right) + \frac{X_k}{M_k} \qquad (7.4) \\ &= \frac{X_k}{M_k}. \end{aligned}$$

7.5. Arbitraje

DEFINICIÓN 7.5.1. Un **arbitraje** es un portafolio que comienza en $X_0 = 0$ y termina con X_T tal que
$$P(X_T \geq 0) = 1, P(X_T > 0) > 0.$$

TEOREMA 7.5.2 (Fundamental de precios). *Si se tiene una medida de probabilidad equivalente a P neutra al riesgo, entonces no hay arbitraje.*

Demostración: Sea $\widetilde{P}$ una probabilidad neutra al riesgo, sea $X_0 = 0$, y sea X_T la fortuna final correspondiente a cualquier proceso portafolio. Puesto que $\left\{ \frac{X_k}{M_k} \right\}_{k=0}^{T}$ es martingala con respecto a $\widetilde{P}$,
$$\widetilde{E}\left[\frac{X_k}{M_k} \right] = \widetilde{E}\left[\frac{X_0}{M_0} \right] = 0. \qquad (7.5)$$

Supongamos $P(X_T \geq 0) = 1$. Tenemos:

$$\begin{aligned} P(X_T \geq 0) = 1 &\Rightarrow P(X_T < 0) = 0 \\ &\Rightarrow \widetilde{P}(X_T < 0) = 0 \Rightarrow \widetilde{P}(X_T \geq 0) = 1. \end{aligned} \tag{7.6}$$

por lo tanto de (7.5) y (7.6) tenemos que $\widetilde{P}(X_T = 0) = 1$. De donde

$$\widetilde{P}(X_T = 0) = 1 \Rightarrow \widetilde{P}(X_T > 0) = 0 \Rightarrow P(X_T > 0) = 0. \tag{7.7}$$

por tanto no hay arbitraje.

7.6. Construcción de la probabilidad neutra al riesgo

Recordemos que:

- $Y_1, \ Y_2, \ldots, Y_n$ son variables aleatorias independientes normales estandard, definidas en algún $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.
- $S_k = S_0 \exp\left\{\sigma B_k + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) k\right\}$.
- $$S_{k+1} = S_k \exp\left\{\sigma Y_{k+1} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right\}.$$

como $M_{k+1} = e^{r(k+1)}$, tenemos

$$\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} = \frac{S_k}{M_k} \exp\{\sigma Y_{k+1} + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})\}, \tag{7.8}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} / \mathfrak{F}_k\right] &= \frac{S_k}{M_k} \left\{E\left[\exp\left\{\sigma Y_{k+1}\right\}\right]\right\} \exp\left\{\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right\} \\ &= \frac{S_k}{M_k} \exp\left\{\mu - r\right\}. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Si $\mu = r$, la medida de probabilidad es neutra al riesgo. Si $\mu \neq r$, tenemos que hacer algo más para encontrar la medida neutra al riesgo:

$$\begin{aligned} \frac{S_{k+1}}{M_{k+1}} &= \frac{S_k}{M_k} \exp\left\{\sigma Y_{k+1} + (\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})\right\} \\ &= \frac{S_k}{M_k} \exp\left\{\sigma \widetilde{Y}_{k+1} - \frac{\sigma^2}{2}\right\} \end{aligned} \tag{7.10}$$

donde

$$\widetilde{Y}_{k+1} = Y_{k+1} + \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

La cantidad $\frac{\mu-r}{\sigma}=\theta$ es llamada precio del riesgo en el mercado. Ahora queremos una probabilidad $\widetilde{P}$ con la cual $\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_n$ sean variables aleatorias independientes normales estandard, y así tendríamos:

$$\begin{aligned}\widetilde{E}\left[\frac{S_{k+1}}{M_{k+1}}/\mathfrak{F}_k\right] &= \frac{S_k}{M_k}\widetilde{E}\left[\exp\left\{\sigma\widetilde{Y}_{k+1}\right\}/\mathfrak{F}_k\right]\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\right\} \\ &= \frac{S_k}{M_k}\exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2\right\} = \frac{S_k}{M_k}.\end{aligned} \tag{7.11}$$

7.7. La idea de Girsanov en tiempo discreto

Definamos la variable aleatoria

$$Z=\exp\left[\sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j-\frac{1}{2}\theta^2\right)\right].$$

Propiedades de Z:

- $Z \geq 0$,
- $$\begin{aligned}E(Z) &= E\left(\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j\right)\right\}\right)\exp\left\{-\frac{n}{2}\theta^2\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{n}{2}\theta^2\right\}\exp\left\{-\frac{n}{2}\theta^2\right\} = 1.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Definamos una nueva probabilidad $\widetilde{P} \cong P$ mediante:

$$\widetilde{P}(A)=\int_A Z dP, \ \forall A \in \mathfrak{F},$$

entonces

$$\widetilde{P}(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{F},$$

y

$$\widetilde{P}(\Omega)=E(Z)=1,$$

por lo tanto $\widetilde{P}$ es una medida de probabilidad.

Ahora demostremos que $\widetilde{P}$ es una medida de probabilidad neutra al riesgo, para ello basta demostrar que:

$$\widetilde{Y}_1=Y_1+\theta, \widetilde{Y}_2=Y_2+\theta, \cdots, \widetilde{Y}_n=Y_n+\theta.$$

son v.a.i. $N(0,1)$ respecto a la medida $\widetilde{P}$.

Demostración:

- $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ son v.a.i. $N(0,1)$ respecto a la medida P, y

$$E\exp\left[\sum_{j=1}^{n}u_jY_j\right]=\exp\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}u_j^2\right].$$

- $\widetilde{Y}_1 = Y_1 + \theta, \widetilde{Y}_2 = Y_2 + \theta, \cdots, \widetilde{Y}_n = Y_n + \theta.$
- $Z > 0$ casi seguramente, donde
- $Z = \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right],$

$$\widetilde{P}(A) = \int_A Z dP, \ \forall A \in \mathfrak{F},$$

por lo tanto $\widetilde{E}X = EXZ, \forall X$ v.a.
- Calculemos la transformada de Laplace de $(\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_n)$ respecto a la medida de probabilidad $\widetilde{P}$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}\exp\left[\sum_{j=1}^{n} u_j\widetilde{Y}_j\right] &= E\exp\left[\sum_{j=1}^{n} u_j\widetilde{Y}_j\right]\exp\left[\sum_{j=1}^{n}\left(-\theta Y_j - \frac{1}{2}\theta^2\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left[\sum_{j=1}^{n} u_j(Y_j - \theta) + \sum_{j=1}^{n}(-\theta Y_j - \frac{1}{2}\theta^2)\right]\right] \\
&= \left[E\exp\left[\sum_{j=1}^{n}(u_j - \theta)Y_j\right]\right]\exp\{\sum_{j=1}^{n}(u_j\theta - \frac{1}{2}\theta^2)\} \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}(u_j - \theta)^2\right]\exp\left[\sum_{j=1}^{n}(u_j\theta - \frac{1}{2}\theta^2)\right] \\
&= \exp\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{u_j^2}{2}\right].
\end{aligned}$$

7.8. Valuación de un call europeo

El precio del activo al tiempo n es:

$$\begin{aligned}
S_n &= S_0\exp\left\{\sigma B_n + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)n\right\} \\
&= S_0\exp\left\{\sigma\sum_{j=1}^{n} Y_j + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)n\right\} \\
&= S_0\exp\left\{\sigma\sum_{j=1}^{n}\widetilde{Y}_j + \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)n\right\}.
\end{aligned}$$

El valor del call en el tiempo de ejercicio N es $(S_N - K)^+$, ahora el precio actualizado del call es:

$$\widetilde{E}\frac{(S_N - K)^+}{M_N} = \widetilde{E}\left[\exp^{-rN}\left(S_0 \exp\left\{\sigma \sum_{j=1}^{N} \widetilde{Y}_j + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)N\right\} - K\right)^+\right].$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^{N} \widetilde{Y}_j$ es $N(0, \mathrm{N}\,)$ respecto a la medida de probabilidad $\widetilde{P}$, por tanto:

$$\begin{aligned}\tilde{E}\frac{(S_N - K)^+}{M_N} = &\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-rN)\left(S_0 \exp\left\{\sigma b + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)N\right\} - K\right)^+ \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{b^2}{2N^2}\right) db.\end{aligned} \tag{7.13}$$

Este es el precio Black-Scholes, el cual no depende de μ.

Bibliografía

[1] R. B. Ash, *Real Analysis and Probability*, Academic Press, New York, 1972.

[2] D. Lamberton and B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman and Hall, London, 1997.

[3] S. N. Neftci, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Second Edition, Academic Press, San Diego, 2000.

[4] S. E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance Vol I* , Springer-Verlag, New York, 2004

[5] H.M. Taylor and S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, New York, 1994.

[6] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge, 1997.

[7] R.J.Williams *Introduction to the Mathematics of Finance* Graduate Studies in Mathematics Vol 72, American Mathematical Society.